

論文

面外せん断荷重下での楕円形すべり境界を有する横等方性圧電材料の解析

佐々木 徹¹

¹機械工学科 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka National College of Technology)

ANALYSIS OF TRANSVERSELY ISOTROPIC PIEZOELECTRIC MATERIALS WITH SLIDING ELLIPTICAL BOUNDARY UNDER OUT-OF-PLANE SHEAR LOADINGS

Toru SASAKI¹

Abstract

Piezoelectric materials are widely used in industrial areas from the excellent characteristic of mechanical and electrical couplings. On the other hands, cavities, inclusions, and dislocations in the materials affect fracture and strength of materials. So it is important to analyze mechanical and electrical fields around these defects. In this paper, two-dimensional electroelastic analysis is performed for transversely isotropic piezoelectric materials containing sliding elliptical boundary. General closed-formed solutions are obtained by using the complex potential functions and conformal mapping technique. And several numerical examples are shown by graphical representation.

Key Words : *Transversely Isotropic Piezoelectric Material, Elliptical Boundary, Out-of-Plane Shear Loading, Complex Potential Function*

1. 緒言

多種多様な機械や構造物に用いられる部材では、過酷な条件下においても高品質な性能が必要とされ、さらにその性能の維持が求められる。材料のもつ性能を最大限に生かし、十分な機能を発揮させるためには、材料中に生じる応力状態を定量的に把握し、最適な材料設計や製造が必要となる。また、一般に、材料中に存在する孔や異種材料間の接合界面では、局所的な応力集中が発生し、これが材料全体の強度低下や破壊に影響を及ぼす。したがって、孔や接合境界の周辺の応力場を解析することが重要であり、弾性理論によりこれを明らかにしようとする研究が盛んに行われてきた。一方、材料強度は、クラック、介在物、あるいは転位等によって引き起こされる応力集中に大きく左右される。このうち、材料の脆性的な性質がクラック、介在物等の影響によるものであるとして、これを連続体力学的に解明しようとする

る試みは破壊力学という学問体系を生んだ。さらに、金属のような延性材料が持つような塑性的な性質を転位という結晶配列の構造変化に関する概念として導入することで説明しようとする研究から転位論が完成した。このような古典的な弾性材料を対象とした問題は様々な研究者^{1)~3)}によりほぼ体系化されたといえる。

ここで、圧電材料は、力学的観点からは脆性的な性質を示し、各種の欠陥が形成された場合には、き裂の進展による破壊の危険性が増加する。圧電材料に関するこの種の研究では、圧電材料が応用されはじめてから幾つもの研究が行われている^{4),5)}ものの圧電材料に単一のクラックのみが存在する問題を対象としている場合が多く未完成といえる。より現実に近い解析を行うためには荷重条件、材料特性、幾何形状などにおいて、多様な組み合わせを取り入れてさらに発展させる必要がある。

以上のことを踏まえ、本研究ではこれまでの各種

の既往の研究を進展させ、理論的に導かれる解析解とその数値計算例を提示し、今後の各分野での応用の基礎資料を提供することを目的とする。

本研究での解析手段としては、Muskhelishvili¹⁾や森口⁶⁾らが提唱した二次元弾性場において定義される複素解析関数を拡張した手法を用いる。複素関数論は多くの二次元問題を解くことのできる数学理論であり、有限要素法や境界要素法に比べて、極めて短時間で計算結果が得られ、その計算精度も要素分割の精粗に依存しないという利点がある。また、理論解析的により得られた結果は、数値解析結果の検証や破壊クライテリアの考察のためにも有益なものである。

圧電材料に関するこの種の既往の問題に関する研究として、Parton⁵⁾は圧電材料の破壊力学に関する重要な結果を発表したが、そこで仮定したクラックの境界条件は力学的には応力自由であり、電気的には電気ポテンシャルおよび電気変位の法線成分がクラック境界で連続であるものとしたものであった。しかし、圧電材料の誘電率は空気や真空のものよりも通常 10^3 倍程度以上大きいので、クラックの上面と下面とでの電気ポテンシャルは異なることから、そこで設定された境界条件について確証が得られていない。これに対してDeeg⁷⁾、Pak⁸⁾は上下のクラック面の法線方向の電気変位は0として扱えるような境界条件(クラック上下面のどちらにも自由電荷は存在せず、クラック内の電気変位は無視できる)を提案している。このような既往の研究において、設定する境界条件の優劣について、必ずしも理論的ならびに実験的な確証が得られていないといえる。したがって、ここでは考えられるすべての境界条件に対する解析解を提案することとする。

2. 基礎関係式

2. 1 応力・電場・電気変位を求める公式

本論文においては図-1に示すように、奥行き方向に断面形状の変化のない横等方性圧電弾性媒体内に、楕円形すべり境界が存在し、無限遠より面外方向に一樣なせん断荷重および面内方向に一樣な電氣的負荷が作用する問題を取り扱う。 xy -平面に垂直な厚さ方向の座標を z 軸として、面外せん断応力 τ_{zx} , τ_{yz} 、変位 u_z および電場 E_x, E_y 、電気変位 D_x, D_y はいずれも面内座標 (x, y) のみの関数となる。なお、すべり境界を考慮した問題は、古典弾性体を対象に幾つか行われている⁹⁾。本論文で取り扱う問題は、これま

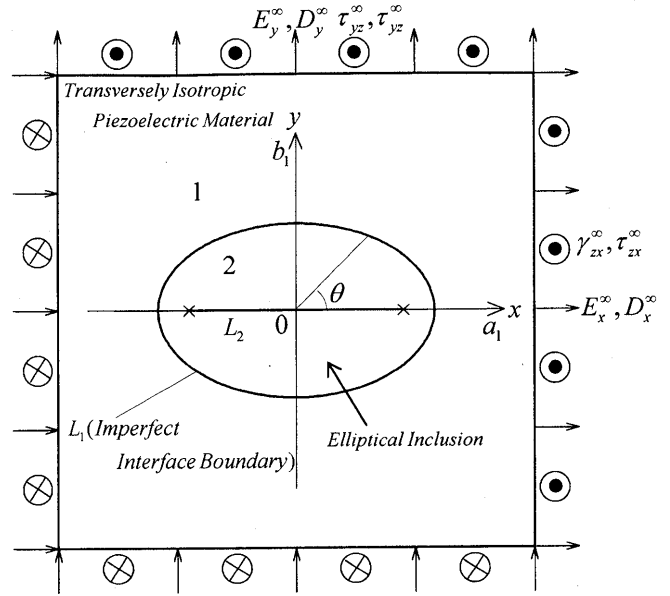


図-1 単一の楕円形介在物を有する横等方性圧電弾性体

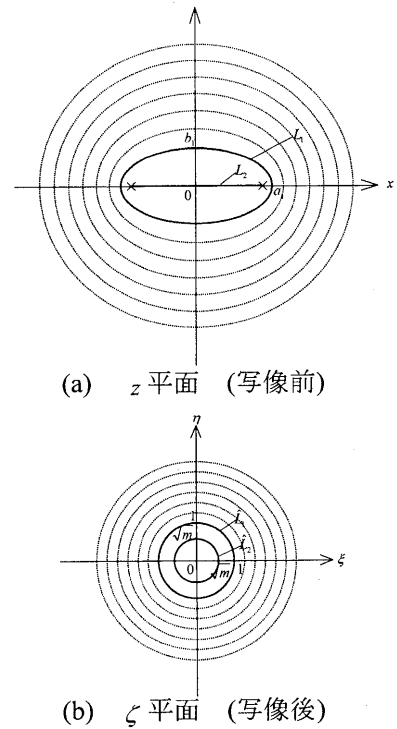


図-2 楕円境界の写像

での古典的な弾性材料に関する研究を包含することになる。

物体力を無視した力学的釣合式と電気変位に対するガウスの法則から次式が成立する。

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

横等方性圧電材料の構成方程式は、力学特性は面外せん断について、また、圧電特性と誘電特性は面内について等方となり、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= C_{44}\gamma_{xz} + e_{15}E_x, & \tau_{yz} &= C_{44}\gamma_{yz} + e_{15}E_y, \\ D_x &= e_{15}\gamma_{xz} - \epsilon_{11}E_x, & D_y &= e_{15}\gamma_{yz} - \epsilon_{11}E_y. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 c_{44} はせん断弾性定数、 ϵ_{11} は誘電率、 e_{15} は圧電定数である。

せん断ひずみ γ_{xz}, γ_{yz} および電場 E_x, E_y は、 z 方向変位 u_z および電気ポテンシャル ϕ によって、次式で関連づけられる。

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (3)$$

以上に示した式を組み合わせることにより、場の支配方程式として、次の調和方程式が得られる。

$$\nabla^2 u_z = 0, \quad \nabla^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (4)$$

ここで、楕円境界およびその内外の領域を解析的に取り扱うことは極めて困難であるので、楕円を円に写像する関数を導入する。ここでは、図-2のように z -平面を ζ -平面に写像する関数 $\omega(\zeta)$ を次式のように設定する。

$$z = x + iy = \omega(\zeta) = R_0 \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right). \quad (5)$$

ここに、上式中の係数 R_0 および m は次式で与えられる。

$$R_0 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}. \quad (6)$$

上式中の a_1, b_1 は最も外側の楕円境界 L_1 の長半軸、短半軸の長さを表す。この写像関数を用いることにより、境界 L_1 は $\rho_1 = 1.0$ の単位円に、また共焦点間を結んだ境界 L_2 は半径 \sqrt{m} の円に写像される。この変換は直感的には、(a)の楕円焦点間に切れ目を入れた後、この切れ目が半径 \sqrt{m} の真円となるまで z -平面を y 方向に引き伸ばしたものと解釈できる。また、楕円形境界とその外側領域は単位円とその外側領域に一对一の関係で写像される。一方で、楕円形境界の内側領域は単位円の内側領域に一对一で対応するが、図-2(a)の共焦点間に限っては図-2(b)の ξ 軸をはさむ半径 \sqrt{m} の円上の二点に対応することになる。よって、半径 \sqrt{m} の円上の二点对応の問題を考慮する必要がある。

次に、式(4)に示した支配方程式を解くために、領域における2つの複素ポテンシャル関数 $U(z), \Phi(z)$ を導入し、変位 u_z 、電気ポテンシャル ϕ は次式で関連付ける。

$$\begin{cases} u_z = -\text{Im}[U(z)], \\ \phi = -\text{Im}[\Phi(z)]. \end{cases} \quad (7)$$

上式を式(2)~(4)に代入し整理すれば、応力、ひずみ、電気変位および電場は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\eta z} + i\tau_{\xi z} &= (\tau_{yz} + i\tau_{xz})e^{i\varphi} = \{C_{44}U'(z) + e_{15}\Phi'(z)\}e^{i\varphi}, \\ \gamma_{\eta z} + i\gamma_{\xi z} &= (\gamma_{yz} + i\gamma_{xz})e^{i\varphi} = U'_n(z)e^{i\varphi}, \\ D_\eta + iD_\xi &= (D_y + iD_x)e^{i\varphi} = \{e_{15}U'(z) - \epsilon_{11}\Phi'(z)\}e^{i\varphi}, \\ E_\eta + iE_\xi &= (E_y + iE_x)e^{i\varphi} = -\Phi'(z)e^{i\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

上式中の下付添字 (ξ, η) は楕円境界 L に沿う曲線座標を意味する。ここに、

$$e^{i\varphi} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}. \quad (9)$$

また、合応力 P_z および合電気変位 P_E は式(8)より次式となる。

$$\begin{cases} P_z = \int (\tau_{xz} dy - \tau_{yz} dx) = -\text{Re}[C_{44}U(z) + e_{15}\Phi(z)], \\ P_E = \int (D_x dy - D_y dx) = -\text{Re}[e_{15}U(z) - \epsilon_{11}\Phi(z)]. \end{cases} \quad (10)$$

2. 2 境界条件と定式化

境界 L_1 上の境界条件は、①力学的変位 u_z 、②合応力 P_z 、③電気ポテンシャル ϕ および④合電気変位 P_E に関して、界面上のすべりを考慮し次式のように設定する。

$$\left. \begin{aligned} u_z^1 &= s_{11}u_z^2, & P_z^1 &= s_{12}P_z^2, \\ \phi^1 &= s_{21}\phi^2, & P_E^1 &= s_{22}P_E^2, \end{aligned} \right\} \text{ on } L_1. \quad (11)$$

ここで、 s_{11}, s_{12}, s_{21} および s_{22} がすべり係数である。 $s_{11} = s_{12} = s_{21} = s_{22} = 1.0$ であれば完全接合の状態となり、 $s_{11} = s_{12} = s_{21} = s_{22} = 0$ で完全すべりの状態となる。なお、ここでは上式のようにすべり係数をそれぞれ独立に、より一般的な形で導入したが、力学的変位、合応力、電気ポテンシャルおよび合電気変位の間には何らかの関係が成り立つものと考えられる。例えば、「変位の差に比例してせん断応力が発生する。」と設定する場合があるが、その場合は s_{11}, s_{12}, s_{21} および s_{22} を適切に与えればよい。また、 $s_{12}s_{21}, s_{22} \rightarrow 0$ とすればParton⁵⁾ の用いた境界条件となり、 $s_{12}s_{22} \rightarrow 0$ とすればDeeg⁷⁾, Pak⁸⁾ の用いた境界条件に縮退されることになる。

この境界条件を満足するように、鏡像原理を用いた解析接続法により定式化を行う。

最初に、境界 L_1 (i.e. $\rho_1 = 1$) 上においては $\bar{\zeta} = 1/\zeta$ であるから、媒体側および介在物側の力学的変位、合応力、電気ポテンシャルおよび合電気変位の関係は式(7)および式(10)より式(11)は次のように表される。

①力学的変位の連続条件 $u_z^1|_{\rho=1} = s_{11}u_z^2|_{\rho=1}$ より、

$$U_1(\zeta) - \overline{U_1(1/\zeta)} = s_{11}U_2(\zeta) - s_{11}\overline{U_2(1/\zeta)}. \quad (12)$$

②合応力の連続条件 $P_z^1 \Big|_{\rho=1} = s_{12} P_z^2 \Big|_{\rho=1}$ より,

$$\left. \begin{aligned} & C_{44}^1 \{U_1(\zeta) + \overline{U_1(1/\zeta)}\} + e_{15}^1 \{\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(1/\zeta)}\} \\ & = s_{12} C_{44}^2 \{U_2(\zeta) + \overline{U_2(1/\zeta)}\} + s_{12} e_{15}^2 \{\Phi_2(\zeta) + \overline{\Phi_2(1/\zeta)}\}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

③電気ポテンシャルの連続条件 $\varphi^1 \Big|_{\rho=1} = s_{21} \varphi^2 \Big|_{\rho=1}$ より,

$$\Phi_1(\zeta) - \overline{\Phi_1(1/\zeta)} = s_{21} \Phi_2(\zeta) - s_{21} \overline{\Phi_2(1/\zeta)}. \quad (14)$$

④合電気変位の連続条件 $P_E^1 \Big|_{\rho=1} = s_{22} P_E^2 \Big|_{\rho=1}$ より,

$$\left. \begin{aligned} & e_{15}^1 \{U_1(\zeta) + \overline{U_1(1/\zeta)}\} - e_{11}^1 \{\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(1/\zeta)}\} \\ & = s_{22} e_{15}^2 \{U_2(\zeta) + \overline{U_2(1/\zeta)}\} - s_{22} e_{11}^2 \{\Phi_2(\zeta) + \overline{\Phi_2(1/\zeta)}\}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(12)～式(15)を連立させて解くと境界 U_2^-, Φ_2^- 上においては、次の二式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} S_1 U_1(\zeta) &= \{e_{11}^1 (s_{12} C_{44}^2 + s_{11} C_{44}^1) + e_{15}^1 (s_{22} e_{15}^2 + s_{11} e_{15}^1)\} U_2(\zeta) \\ &\quad + \{e_{11}^1 (s_{11} C_{44}^2 - s_{12} C_{44}^1) + e_{15}^1 (s_{11} e_{15}^2 - s_{22} e_{15}^1)\} \overline{U_2(1/\zeta)} \\ &\quad + (s_{12} e_{11}^1 e_{15}^2 - s_{22} e_{15}^1 e_{11}^2) \{\Phi_2(\zeta) + \overline{\Phi_2(1/\zeta)}\}, \\ S_1 \Phi_1(\zeta) &= \{s_{12} e_{15}^1 C_{44}^2 - s_{22} e_{15}^2 C_{44}^1\} \{U_2(\zeta) + \overline{U_2(1/\zeta)}\} \\ &\quad + \{C_{44}^1 (s_{22} e_{11}^2 + s_{21} e_{11}^1) + e_{15}^1 (s_{22} e_{15}^2 + s_{21} e_{15}^1)\} \Phi_2(\zeta) \\ &\quad + \{C_{44}^1 (s_{21} e_{11}^2 - s_{22} e_{11}^1) + e_{15}^1 (s_{21} e_{15}^2 - s_{12} e_{15}^1)\} \overline{\Phi_2(1/\zeta)}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに、 $S_1 = 2\{e_{11}^1 C_{44}^1 + (e_{15}^1)^2\}$ である。

$$\left. \begin{aligned} S_2 U_2(\zeta) &= \{s_{22} e_{11}^2 (s_{12}/s_{11} C_{44}^2 + C_{44}^1) + s_{12} e_{15}^2 (s_{22}/s_{11} e_{15}^2 + e_{15}^1)\} U_1(\zeta) \\ &\quad - \{s_{22} e_{11}^2 (s_{12}/s_{11} C_{44}^2 - C_{44}^1) + s_{12} e_{15}^2 (s_{22}/s_{11} e_{15}^2 - e_{15}^1)\} \overline{U_1(1/\zeta)} \\ &\quad + (s_{22} e_{11}^2 e_{15}^1 - s_{12} e_{15}^2 e_{11}^1) \{\Phi_1(\zeta) - \overline{\Phi_1(1/\zeta)}\}, \\ S_2 \Phi_2(\zeta) &= \{s_{22} e_{15}^2 C_{44}^1 - s_{12} e_{15}^1 C_{44}^2\} \{U_1(\zeta) + \overline{U_1(1/\zeta)}\} \\ &\quad + \{s_{12} C_{44}^2 (s_{22}/s_{21} e_{11}^2 + e_{11}^1) + s_{22} e_{15}^2 (s_{12}/s_{21} e_{15}^2 + e_{15}^1)\} \Phi_1(\zeta) \\ &\quad + \{s_{12} C_{44}^2 (e_{11}^1 - s_{22}/s_{21} e_{11}^2) + s_{22} e_{15}^2 (e_{15}^1 - s_{12}/s_{21} e_{15}^2)\} \overline{\Phi_1(1/\zeta)}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに、 $S_2 = 2s_{12} s_{22} \{e_{11}^2 C_{44}^2 + (e_{15}^2)^2\}$ である。

ここで、式(17)で与えられた関数について、解析接続によって境界 L_1 の外側領域から内側領域に向かって一般化した関数をそれぞれ U_2^-, Φ_2^- と書くとする、次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} U_2^-(\zeta) &= P_{11}^1 U_1^-(\zeta) - P_{12}^1 \overline{U_1^-(1/\zeta)} \\ &\quad + P_{21}^1 \Phi_1^-(\zeta) - P_{22}^1 \overline{\Phi_1^-(1/\zeta)}, \\ \Phi_2^-(\zeta) &= Q_{11}^1 U_1^-(\zeta) + Q_{12}^1 \overline{U_1^-(1/\zeta)} \\ &\quad + Q_{21}^1 \Phi_1^-(\zeta) + Q_{22}^1 \overline{\Phi_1^-(1/\zeta)}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここに、 $P_{ij}^1, Q_{ij}^1 (i, j=1, 2)$ は次式で表される実定数である。

$$\left. \begin{aligned} P_{11}^1 &= \{s_{22} e_{11}^2 (s_{12}/s_{11} C_{44}^2 + C_{44}^1) + s_{12} e_{15}^2 (s_{22}/s_{11} e_{15}^2 + e_{15}^1)\} / S_2, \\ P_{12}^1 &= \{s_{22} e_{11}^2 (s_{12}/s_{11} C_{44}^2 - C_{44}^1) + s_{12} e_{15}^2 (s_{22}/s_{11} e_{15}^2 - e_{15}^1)\} / S_2, \\ P_{21}^1 &= -P_{22}^1 = \{s_{22} e_{11}^2 e_{15}^1 - s_{12} e_{15}^2 e_{11}^1\} / S_2, \\ Q_{11}^1 &= Q_{12}^1 = \{s_{22} e_{15}^2 C_{44}^1 - s_{12} e_{15}^1 C_{44}^2\} / S_2, \\ Q_{21}^1 &= \{s_{12} C_{44}^2 (s_{22}/s_{21} e_{11}^2 + e_{11}^1) + s_{22} e_{15}^2 (s_{12}/s_{21} e_{15}^2 + e_{15}^1)\} / S_2, \\ Q_{22}^1 &= \{s_{12} C_{44}^2 (e_{11}^1 - s_{22}/s_{21} e_{11}^2) + s_{22} e_{15}^2 (e_{15}^1 - s_{12}/s_{21} e_{15}^2)\} / S_2. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

同様に、式(16)で与えられた関数について、解析接続によって境界 L_1 の内側領域から外側領域に向かって一般化した関数をそれぞれ U_1^+, Φ_1^+ と書くものとすれば、式(18)と類似の次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} U_1^+(\zeta) &= V_{11}^1 U_2^+(\zeta) + V_{12}^1 \overline{U_2^+(1/\zeta)} \\ &\quad + V_{21}^1 \Phi_2^+(\zeta) + V_{22}^1 \overline{\Phi_2^+(1/\zeta)}, \\ \Phi_1^+(\zeta) &= W_{11}^1 U_2^+(\zeta) + W_{12}^1 \overline{U_2^+(1/\zeta)} \\ &\quad + W_{21}^1 \Phi_2^+(\zeta) + W_{22}^1 \overline{\Phi_2^+(1/\zeta)}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここに、 $V_{ij}^1, W_{ij}^1 (i, j=1, 2)$ は次式で表される実定数である。

$$\left. \begin{aligned} V_{11}^1 &= \{e_{11}^1 (s_{12} C_{44}^2 + s_{11} C_{44}^1) + e_{15}^1 (s_{22} e_{15}^2 + s_{11} e_{15}^1)\} / S_1, \\ V_{12}^1 &= \{e_{11}^1 (s_{11} C_{44}^2 - s_{12} C_{44}^1) + e_{15}^1 (s_{11} e_{15}^2 - s_{22} e_{15}^1)\} / S_1, \\ V_{21}^1 &= V_{22}^1 = \{s_{12} e_{11}^1 e_{15}^2 - s_{22} e_{15}^1 e_{11}^2\} / S_1, \\ W_{11}^1 &= W_{12}^1 = \{s_{12} e_{15}^1 C_{44}^2 - s_{22} e_{15}^2 C_{44}^1\} / S_1, \\ W_{21}^1 &= \{C_{44}^1 (s_{22} e_{11}^2 + s_{21} e_{11}^1) + e_{15}^1 (s_{22} e_{15}^2 + s_{21} e_{15}^1)\} / S_1, \\ W_{22}^1 &= \{C_{44}^1 (s_{21} e_{11}^2 - s_{22} e_{11}^1) + e_{15}^1 (s_{21} e_{15}^2 - s_{12} e_{15}^1)\} / S_1. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

さらに、共焦点間を結ぶ境界 L_2 は ζ -平面上の半径 \sqrt{m} の円に写像されることになるが、ここでの解析接続は、この共焦点の x 軸上に沿う直上および直下での関数の連続性の要請から、次式で表される。

$$U_2^+(\zeta) = U_2^-\left(\frac{m}{\zeta}\right), \quad \Phi_2^+(\zeta) = \Phi_2^-\left(\frac{m}{\zeta}\right). \quad (22)$$

ところで、境界 L_1 の外側の媒体の無限領域に関する関数 $U_1^-(\zeta), \Phi_1^-(\zeta)$ は、無限遠で作用する一様な面外力学的荷重および面内電氣的荷重の設定から、主要部として次式のように、 ζ の一次の項を採用すればよい。

$$U_1^-(\zeta) = A\omega(\zeta) = AR_0\zeta, \quad \Phi_1^-(\zeta) = B\omega(\zeta) = BR_0\zeta. \quad (23)$$

したがって、各領域の複素ポテンシャル関数 $U_1(\zeta), \Phi_1(\zeta), U_2(\zeta)$ および $\Phi_2(\zeta)$ は、上式までの解析接続法によって求めた、それぞれ2種類の関数 $U_1^-, U_2^-, \Phi_1^-, \Phi_2^-$ ならびに $U_1^+, U_2^+, \Phi_1^+, \Phi_2^+$ を重ね合わせるにより最終的に次式のように求められる。

$$\begin{aligned}
 U_1(\zeta) &= U_1^-(\zeta) + U_1^+(\zeta) \\
 &= R_0 \left[A + \left\{ (V_{12}^{-1}P_{11}^1 + V_{22}^{-1}Q_{11}^1)m + (-V_{11}^{-1}P_{12}^1 + V_{21}^{-1}Q_{12}^1)/m \right\} \bar{A} \right. \\
 &\quad + \left\{ (V_{12}^{-1}P_{21}^1 + V_{22}^{-1}Q_{21}^1)m + (-V_{11}^{-1}P_{22}^1 + V_{21}^{-1}Q_{22}^1)/m \right\} \bar{B} \left. \right] \zeta \\
 &\quad + R_0 \left[\left\{ (V_{11}^{-1}P_{11}^1 + V_{21}^{-1}Q_{11}^1)m + (-V_{12}^{-1}P_{12}^1 + V_{22}^{-1}Q_{12}^1)/m \right\} A \right. \\
 &\quad + \left\{ (V_{11}^{-1}P_{21}^1 + V_{21}^{-1}Q_{21}^1)m + (-V_{12}^{-1}P_{22}^1 + V_{22}^{-1}Q_{22}^1)/m \right\} \bar{B} \left. \right] / \zeta, \\
 U_2(\zeta) &= U_2^-(\zeta) + U_2^+(\zeta) \\
 &= R_0 \left[\left\{ (P_{11}^1A + P_{21}^1B) - (P_{12}^1\bar{A} + P_{22}^1\bar{B}) \right\} / m \right] \zeta \\
 &\quad + \left\{ - (P_{12}^1\bar{A} + P_{22}^1\bar{B}) + (P_{11}^1A + P_{21}^1B)m \right\} / \zeta \left. \right].
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\zeta) &= \Phi_1^-(\zeta) + \Phi_1^+(\zeta) \\
 &= R_0 \left[B + \left\{ (W_{12}^{-1}P_{11}^1 + W_{22}^{-1}Q_{11}^1)m + (-W_{11}^{-1}P_{12}^1 + W_{21}^{-1}Q_{12}^1)/m \right\} \bar{A} \right. \\
 &\quad + \left\{ (W_{12}^{-1}P_{21}^1 + W_{22}^{-1}Q_{21}^1)m + (-W_{11}^{-1}P_{22}^1 + W_{21}^{-1}Q_{22}^1)/m \right\} \bar{B} \left. \right] \zeta \\
 &\quad + R_0 \left[\left\{ (W_{11}^{-1}P_{11}^1 + W_{21}^{-1}Q_{11}^1)m + (-W_{12}^{-1}P_{12}^1 + W_{22}^{-1}Q_{12}^1)/m \right\} A \right. \\
 &\quad + \left\{ (W_{11}^{-1}P_{21}^1 + W_{21}^{-1}Q_{21}^1)m + (-W_{12}^{-1}P_{22}^1 + W_{22}^{-1}Q_{22}^1)/m \right\} \bar{B} \left. \right] / \zeta, \\
 \Phi_2(\zeta) &= \Phi_2^-(\zeta) + \Phi_2^+(\zeta) \\
 &= R_0 \left[\left\{ (Q_{11}^1A + Q_{21}^1B) + (Q_{12}^1\bar{A} + Q_{22}^1\bar{B}) \right\} / m \right] \zeta \\
 &\quad + \left\{ (Q_{12}^1\bar{A} + Q_{22}^1\bar{B}) + (Q_{11}^1A + Q_{21}^1B)m \right\} / \zeta \left. \right].
 \end{aligned} \tag{25}$$

最後に、式(24)および式(25)の複素定数 A, B を決定するために、媒体領域に対する複素ポテンシャル $U_1(\zeta)$ および $\Phi_1(\zeta)$ に着目する。式(23)の設定の際に想定した無限遠より一様な力学的負荷のせん断応力 $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$ 、せん断ひずみ $\gamma_{xz}^\infty, \gamma_{yz}^\infty$ 、および電気的負荷の電気変位 D_x^∞, D_y^∞ 、電場 E_x^∞, E_y^∞ が作用するものとすれば、式(8)より次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 \gamma_{yz}^\infty + i\gamma_{xz}^\infty &= \{U_1'(\zeta)/\omega'(\zeta)\} \Big|_{|\zeta|=\infty} \\
 &= A + \left\{ (V_{12}^{-1}P_{11}^1 + V_{22}^{-1}Q_{11}^1)m + (-V_{11}^{-1}P_{12}^1 + V_{21}^{-1}Q_{12}^1)/m \right\} \bar{A} \\
 &\quad + \left\{ (V_{12}^{-1}P_{21}^1 + V_{22}^{-1}Q_{21}^1)m + (-V_{11}^{-1}P_{22}^1 + V_{21}^{-1}Q_{22}^1)/m \right\} \bar{B}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

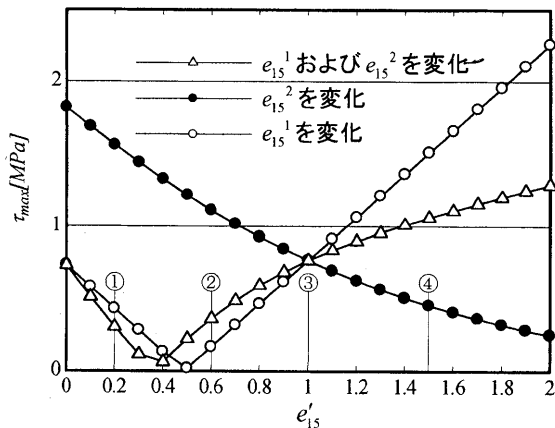


図-3 圧電定数の変化による $\theta = 0^\circ$ での応力値の変化

$$\begin{aligned}
 E_y^\infty + iE_x^\infty &= -\{\Phi_1'(\zeta)/\omega'(\zeta)\} \Big|_{|\zeta|=\infty} \\
 &= B + \left\{ (W_{12}^{-1}P_{11}^1 + W_{22}^{-1}Q_{11}^1)m + (-W_{11}^{-1}P_{12}^1 + W_{21}^{-1}Q_{12}^1)/m \right\} \bar{A} \\
 &\quad + \left\{ (W_{12}^{-1}P_{21}^1 + W_{22}^{-1}Q_{21}^1)m + (-W_{11}^{-1}P_{22}^1 + W_{21}^{-1}Q_{22}^1)/m \right\} \bar{B}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz}^\infty + i\tau_{xz}^\infty &= \left[\{C_{44}^{-1}U_1'(\zeta) + e_{15}^{-1}\Phi_1'(\zeta)\} / \omega'(\zeta) \right] \Big|_{|\zeta|=\infty} \\
 &= C_{44}^{-1}A + e_{15}^{-1}B \\
 &\quad + \left[C_{44}^{-1} \left\{ (V_{12}^{-1}P_{11}^1 + V_{22}^{-1}Q_{11}^1)m + (-V_{11}^{-1}P_{12}^1 + V_{21}^{-1}Q_{12}^1)/m \right\} \right. \\
 &\quad + e_{15}^{-1} \left\{ (W_{12}^{-1}P_{11}^1 + W_{22}^{-1}Q_{11}^1)m + (-W_{11}^{-1}P_{12}^1 + W_{21}^{-1}Q_{12}^1)/m \right\} \left. \right] \bar{A} \\
 &\quad + \left[C_{44}^{-1} \left\{ (V_{12}^{-1}P_{21}^1 + V_{22}^{-1}Q_{21}^1)m + (-V_{11}^{-1}P_{22}^1 + V_{21}^{-1}Q_{22}^1)/m \right\} \right. \\
 &\quad + e_{15}^{-1} \left\{ (W_{12}^{-1}P_{21}^1 + W_{22}^{-1}Q_{21}^1)m + (-W_{11}^{-1}P_{22}^1 + W_{21}^{-1}Q_{22}^1)/m \right\} \left. \right] \bar{B}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 D_y^\infty + iD_x^\infty &= \left[\{e_{15}^{-1}U_1'(\zeta) - \epsilon_{11}^{-1}\Phi_1'(\zeta)\} / \omega'(\zeta) \right] \Big|_{|\zeta|=\infty} \\
 &= e_{15}^{-1}A - \epsilon_{11}^{-1}B \\
 &\quad + \left[e_{15}^{-1} \left\{ (V_{12}^{-1}P_{11}^1 + V_{22}^{-1}Q_{11}^1)m + (-V_{11}^{-1}P_{12}^1 + V_{21}^{-1}Q_{12}^1)/m \right\} \right. \\
 &\quad - \epsilon_{11}^{-1} \left\{ (W_{12}^{-1}P_{11}^1 + W_{22}^{-1}Q_{11}^1)m + (-W_{11}^{-1}P_{12}^1 + W_{21}^{-1}Q_{12}^1)/m \right\} \left. \right] \bar{A} \\
 &\quad + \left[e_{15}^{-1} \left\{ (V_{12}^{-1}P_{21}^1 + V_{22}^{-1}Q_{21}^1)m + (-V_{11}^{-1}P_{22}^1 + V_{21}^{-1}Q_{22}^1)/m \right\} \right. \\
 &\quad - \epsilon_{11}^{-1} \left\{ (W_{12}^{-1}P_{21}^1 + W_{22}^{-1}Q_{21}^1)m + (-W_{11}^{-1}P_{22}^1 + W_{21}^{-1}Q_{22}^1)/m \right\} \left. \right] \bar{B}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

無限遠においては力学的負荷および電気的負荷に対して4つの組み合わせが考えられるが、その負荷に応じて式(26)から式(29)までの式を適切に選び出し、連立方程式を解くことによって複素定数 A, B が決定されることになる。

以上によって、式(24)および式(25)の複素ポテンシャル関数 $U_1(\zeta), \Phi_1(\zeta), U_2(\zeta)$ および $\Phi_2(\zeta)$ が完全に決定されることになる。

3. 数値計算例

ここでは、以上で得られた各条件下の理論解を用いて、数値計算を行った結果を示す。ここでは、力場を表現する方法として、次式で定義する最大せん断応力 $\tau_{\max} (= \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2})$ を用いることとする。また、媒体および介在物の圧電定数の変化が応力場に及ぼす影響を検討する。以下のような条件を基準として数値計算を行う。

$$\left. \begin{aligned} C_{44}^{-1} &= 25.2[GPa], e_{15}^{-1} = 13.0[C/m^2], \varepsilon_{11}^{-1} = 6.36[nC/Vm], \\ C_{44}^{-2}/C_{44}^{-1} &= e_{15}^{-2}/e_{15}^{-1} = \varepsilon_{11}^{-2}/\varepsilon_{11}^{-1} = 0.5, \\ b_1/a_1 &= 0.5, \gamma_{xz}^\infty = 19.3 \times 10^{-6}, E_y^\infty = 7.66 \times 10^5[V/m], \\ s_{11} &= s_{12} = s_{31} = s_{32} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

図-3では、媒体の圧電定数 e_{15}^1 が変化する場合、介在物の圧電定数 e_{15}^2 が変化する場合、媒体と介在物の圧電定数が共に変化する場合を想定している。横軸にはそれぞれの場合において計算に用いた圧電定数を \hat{e}_{15} として、以下のように基準化した e'_{15} をとっている。また、縦軸には境界 L_1 上の $\theta=0^\circ$ での最大せん断応力の値をとっている。

$$e'_{15} = \begin{cases} \hat{e}_{15}/e_{15}^1, & \text{---} \circ \text{---} \\ \hat{e}_{15}/e_{15}^2, & \text{---} \bullet \text{---} \\ \hat{e}_{15}/e_{15}^1 = \hat{e}_{15}/e_{15}^2, & \text{---} \triangle \text{---} \end{cases} \quad (31)$$

図-3より、媒体の圧電定数のみを変化させた場合では、 $\theta=0^\circ$ での最大せん断応力の値は $e'_{15}=0.5$ で極小値をとっていることがわかる。介在物の圧電定数のみを変化させた場合では e'_{15} を増加させるにしたがって $\theta=0^\circ$ での最大せん断応力の値は徐々に減少している。また、媒体および介在物の圧電定数を変化させた場合では、それぞれを独立に変化させた場合の特性を足し合わせた挙動となっている。

次に、図-4～図-6では、 e'_{i5} が図-3中に示した①～④の場合の介在物周辺の等高線図を示した。それぞれの場合において図-3との対応が観察できる。介在物の圧電定数のみを変化させた場合である図-5では、 e'_{i5} を増加させるにしたがって最大値をとる位置が x 軸上から y 軸上に変化している。

4. 結言

本論文では、遠方場での様な面外の力学的負荷および面内の電氣的負荷が作用する楕円形すべり境界を有する横等方性圧電弾性媒体に対する解析解の提示をした。さらに、提示した解析解を用いて、いくつかの数値計算例を示した。

参考文献

- 1) Muskhelishvili, N. I.: *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff Groningen Ltd, 1963.
- 2) Lekhnitskii, S.G.: *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden-Day Inc., 1963.

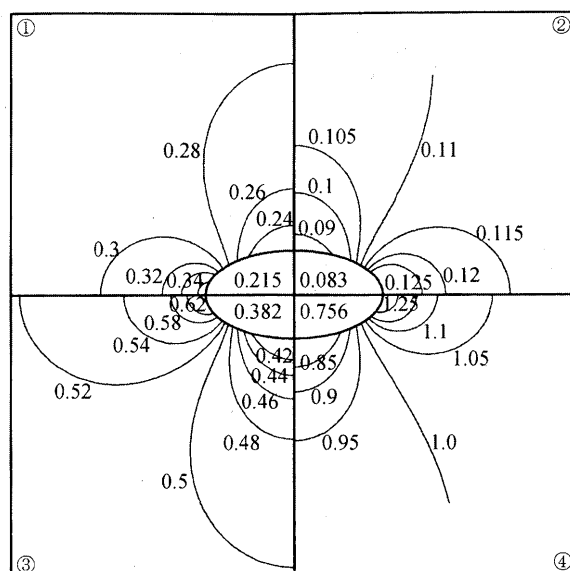


図-4 媒体の圧電定数の変化による最大せん断応力 τ_{\max} [MPa] の等高線図

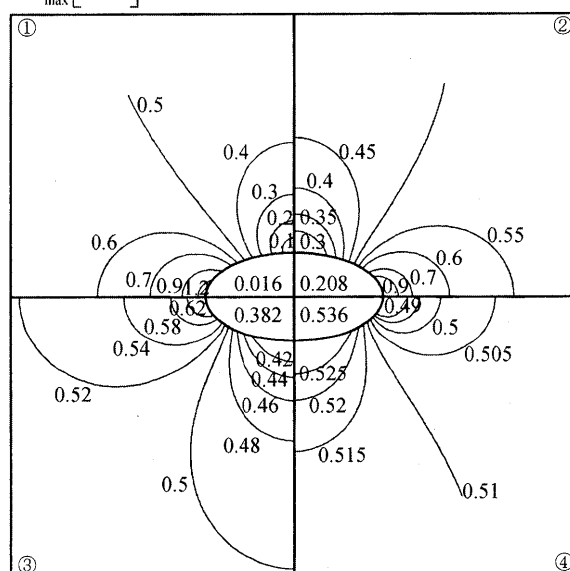


図-5 介在物の圧電定数の変化による最大せん断
応力 τ_{\max} [MPa] の等高線図

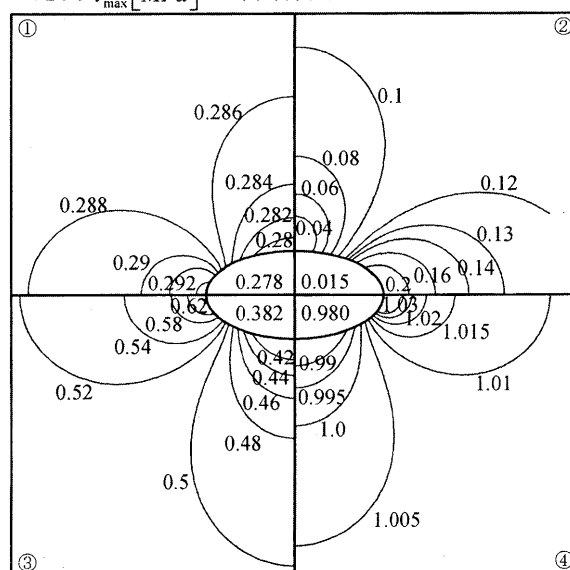


図-6 媒体および介在物の圧電定数の変化による最大せん断応力 τ_{\max} [MPa] の等高線図

- 3) Ting, T. C. T.: *Anisotropic Elasticity*, Oxford Univ. Press, 1994.
- 4) Mason, W.P.: *Physical Acoustics*, Academic Press, I -(12), pp.169-270, 1964.
- 5) Parton VZ: *Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials*, Acta Astronaut, Vol.3, PP.671-683, 1976.
- 6) 森口茂一: 2次元弾性論, 岩波出版, 1957.
- 7) Deeg, W.F.: *The Analysis of Dislocation, Crack and Inclusion, Problems in Piezoelectric materials*, Ph.D Thesis, Stanford University, 1980.
- 8) Pak, Y.E.: *Crack extension force in a Piezoelectric material*, J.Appl.Mech., Vol.57, pp.647-653, 1990.
- 9) 木村清和: 各種条件下での空孔または剛体介在物を有する等方性弾性体の解析解に関する研究, 金沢大学博士論文, 1994.

(2007.9.3 受付)